

安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《数学分析（下）》考试试卷（B 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号_____

题 号	一	二	三	总 分
得 分				
阅卷人				

一、填空题（每空 3 分，共 9 分）

得分

1. 求函数 $z = (x^2 + 1)^y$ 的全微分 $dz = \underline{2xy(x^2 + 1)^{y-1}dx + (x^2 + 1)^y \ln(x^2 + 1)dy}$.
2. 曲面 $x + 2y^2 - 3z^2 = 0$ 在其上的点 $(1, 1, 1)$ 的切平面的方程为 $\underline{x + 4y - 6z = -1}$.
3. 设以 2π 为周期的函数 $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi]$, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x = -\pi$ 处收敛于: $\underline{0}$.

二、计算题（共 58 分）

得分

4. (6 分) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + \sin y) \sin \frac{1}{x + y}$.

解: $|(x^2 + \sin y) \sin \frac{1}{x + y}| \leq |x^2 + \sin y| \leq |x|^2 + |\sin y|$,

又 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (|x|^2 + |\sin y|) = 0$, 由夹逼定理得:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + \sin y) \sin \frac{1}{x + y} = 0.$$

5. (6 分) 设 $z = xf(x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解, 由原式得,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x^2 + y^2) + 2x^2 f'(x^2 + y^2);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy f'(x^2 + y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial [2xyf'(x^2 + y^2)]}{\partial x} = 2yf'(x^2 + y^2) + 4x^2 yf''(x^2 + y^2).$$

6. (6 分) 计算二重积分 $\iint_D x^2 y^2 dx dy$, 其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$ 、直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第 1 象限内的闭区域.

解: 令 $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$, 则 $D_{uv} = \{(u,v) | 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$, 且 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$.

则原式 $= \iint_{D_{uv}} u^2 J dx dy = \frac{1}{2} \int_1^2 u^2 du \int_1^4 \frac{1}{v} dv = \frac{7}{3} \ln 2$.

7. (10 分) 计算曲线积分 $\int_L (\frac{x}{4x^2 + y^2} + 3x) dy + (-\frac{y}{4x^2 + y^2} + 2y) dx$, 其中 L 是以点 $(1, 0)$ 为中心, R 为半径的圆周 ($R > 1$), 逆时针方向.

解: 原式 $= \int_L \frac{x}{4x^2 + y^2} dy + \frac{-y}{4x^2 + y^2} dx + \int_L 3x dy + 2y dx$

定义一个小的椭圆 l^+ : $4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 取逆时针方向, 使得该椭圆完全包含在圆内.

则,

$$\begin{aligned} & \int_L \frac{x}{4x^2 + y^2} dy + \frac{-y}{4x^2 + y^2} dx \\ &= \int_{L-l^+} \frac{x}{4x^2 + y^2} dy + \frac{-y}{4x^2 + y^2} dx + \int_{l^+} \frac{x}{4x^2 + y^2} dy + \frac{-y}{4x^2 + y^2} dx \\ &= 0 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{l^+} x dy - y dx \end{aligned}$$

$$= \pi$$

又 $\int_L 3x dy + 2y dx = \iint_D (3-2) dx dy = \iint_D dx dy = \pi R^2$, 故原式 $= \pi (R^2 + 1)$.

8. (10 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3z dx dy$, 其中 Σ 为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的外侧.

解: 定义平面 $\sigma^+ : z = 0$, 法向量方向指向下. 则有:

利用 Gauss 公式, 有 $\iint_{\Sigma + \sigma^+} x dy dz + 2y dz dx + 3z dx dy = \iiint_{\Omega} 6 dx dy dz = 4\pi a^3$.

.....5 分

又 $\iint_{\sigma^+} x dy dz + 2y dz dx + 3z dx dy = 0$.

$$\text{故原式} = \iint_{\Sigma+\sigma^2} xdydz + 2ydzdx + 3zdx dy - \iint_{\sigma^2} xdydz + 2ydzdx + 3zdx dy = 4\pi a^3.$$

.....10 分

9. (10 分) 应用拉格朗日乘数法, 求函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 2 \ln z$ 在约束条件 $x^2 + y^2 = 1 - z$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 下的最大值.

解: 构造拉格朗日辅助函数

$$L(x, y, z, \lambda) = \ln x + \ln y + 2 \ln z + \lambda(x^2 + y^2 + z - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = \frac{1}{x} + 2\lambda x = 0 \\ L_y = \frac{1}{y} + 2\lambda y = 0 \\ L_z = \frac{2}{z} + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + z - 1 = 0 \end{cases}$$

.....5 分

解得 $\lambda = -3$. 又因 $x > 0, y > 0, z > 0$, 所以 $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}, z = \frac{2}{3}$ 是唯一的极值点. 显然, 当

$x \rightarrow 0^+$ 或 $y \rightarrow 0^+$ 或 $z \rightarrow 0^+$, $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 2 \ln z \rightarrow -\infty$. 因此解得的唯一极值点比

为极大值点, 当然也是在限制条件 $x^2 + y^2 = 1 - z$ 下的最大值点, 进而最大值为

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{3}\right) = \ln \frac{1}{\sqrt{6}} + \ln \frac{1}{\sqrt{6}} + 2 \ln \frac{2}{3} = \ln \frac{2}{27}. \quad \text{.....10 分}$$

10. (10 分) 求三重积分 $\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz$, 其中 Ω 由椭球体 $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} \leq 1$ 围成的闭区域.

$$\text{解: } \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \int_{-2}^2 y^2 dy \iint_{D_y} 1 dx dz,$$

.....5 分

其中 D_y 是由椭圆 $\frac{x^2}{1^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1 - \frac{y^2}{2^2}$ 围成的平面区域.

$$\text{则有, 原式} = 3\pi \int_{-2}^2 y^2 \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) dy = \frac{32\pi}{5}.$$

.....10 分

三、证明题 (共 33 分)

得分	
----	--

11. (10 分) 设 $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos yx dx$,

- (1) 证明 $I(y)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导;
- (2) 求 $I(y)$.

(1) 证明: 令 $f(x, y) = e^{-x^2} \cos yx$, 则有 $f_y(x, y) = -xe^{-x^2} \sin yx$.

显然 $f(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 在 $(0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ 上连续, 且对于每个给定的 y , $I(y)$ 收敛。

又, $|f_y(x, y)| = |xe^{-x^2} \sin yx| \leq xe^{-x^2}$, $x \in (0, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$,

由于反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知, $\int_0^{+\infty} f_y(x, y) dx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。故 $I(y)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导。.....5 分

(2) 解: 利用积分号下求导定理, 得

$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin yx dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sin xy de^{-x^2} = -\frac{y}{2} I(y),$$

$$\text{解得, } I(y) = Ce^{-\frac{y^2}{4}}. \text{ 由于 } I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ 所以 } C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\text{综上, } I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{y^2}{4}}. \text{10 分}$$

12. (9 分) 证明: 曲面 $xyz = a^3$ ($a > 0$) 的切平面与坐标面围成的四面体的体积是一常数。

解: 令 $F(x, y, z) = xyz - a^3$. 任取曲面上的一点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则 $x_0 y_0 z_0 = a^3$.

曲面在点 M 处的切平面方程为:

$$F(x, y, z) = y_0 z_0 (x - x_0) + z_0 x_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0), \text{ 即}$$

$$y_0 z_0 x + z_0 x_0 y + x_0 y_0 z = 3a^3. \text{5 分}$$

于是切平面的截距分别为 $\frac{3a^3}{y_0 z_0}, \frac{3a^3}{x_0 z_0}, \frac{3a^3}{x_0 y_0}$, 从而曲面在点 M 处的切平面与坐标平面

围成的体积, 即四面体的体积为 $V(M) = \frac{1}{6} \left| \frac{3a^3}{y_0 z_0} \times \frac{3a^3}{x_0 z_0} \times \frac{3a^3}{x_0 y_0} \right| = \frac{9a^3}{2}$, 是定值。

.....9 分

13. (6 分) 证明: 函数 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在 $(0, 0)$ 处存在偏导数, 但在 $(0, 0)$ 处不可微.

证明: $f(0, 0) = 0$, 又 $f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$. 同理, 可证明 $f_y(0, 0) = 0$.

所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处存在偏导数3 分

因为, $\Delta z = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}$, $f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y = 0$.

若 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[\Delta z - (f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y)]}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

但

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[\Delta z - (f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y)]}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \stackrel{\Delta y = k\Delta x}{=} \frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1 + k^2}}, \text{ 即极限不存在,}$$

所以在 $(0, 0)$ 处不可微。6 分

14. (8 分) 设函数 $f(x) = \frac{3}{2}x^2$ 定义在 $[-\pi, \pi]$ 上.

(1) 将 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数;

(2) 根据 Fourier 级数的收敛性质, 计算 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

解: (1) 由于 $f(x)$ 是偶函数, 所以, $f(x)$ 的 Fourier 系数 $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$.

$$\text{而 } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{3}{2}x^2 dx = \pi^2.$$

当 $n = 1, 2, \dots$ 时, 有

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{3}{2}x^2 \cos nx dx = \frac{3}{n\pi} \int_0^{\pi} x^2 d \sin nx = \frac{6}{n\pi^2} \int_0^{\pi} x d \cos nx = (-1)^n \frac{6}{n^2}.$$

所以, $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{\pi^2}{2} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad \text{.....5 分}$$

(2) $f(x)$ 在 π 处连续, 所以 Fourier 级数收敛于 $f(\pi) = \frac{3}{2}\pi^2$, 即

$$\frac{3}{2}\pi^2 = \frac{\pi^2}{2} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{2} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ 所以 } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{.....8 分}$$

